$$\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$$

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

तथा बलयुग्म G के अक्ष की दिक्-कोज्याएँ हैं :

$$\frac{L}{G}, \frac{M}{G}, \frac{N}{G}.$$

चूँकि R निकाय के केन्द्रीय अक्ष के अनुदिश जो अद्वितीय है, परिणामी एकल बल है और इसलिए R अपरिवर्तनीय (invariable) है, अतएव $X^2 + Y^2 + Z^2$ निश्चर है।

पुन: यदि θ बल R की क्रिया रेखा तथा बलयुग्म G के अक्ष के बीच का कोण हो, तो

$$\cos\theta = \frac{X}{R}\cdot\frac{L}{G} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{M}{G} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{N}{G}$$

अर्थात् $LX + MY + NZ = RG\cos\theta.$

परन्तु $G\cos\theta$ बलयुग्म का केन्द्रीय अक्ष जो अद्वितीय है, के परित: आघूर्ण है। अतएव $G\cos\theta$ अपरिवर्तनीय है तथा R भी अपरिवर्तनीय है। अत: $LX + MY + NZ$ निश्चर है।

§ 5·9. केन्द्रीय अक्ष का समीकरण (Equation of Central Axis)

प्रमेय— बलों के किसी दिये हुए निकाय के केन्द्रीय अक्ष का निर्धारण करना।

(बिलासपुर 2004, 08, 10, 12; रायपुर 04, 09, 10; सरगुजा 10)

प्रमाण (Proof)— माना कि दिये हुए बलों का निकाय नियामक अक्षों के संदर्भ में X, Y, Z, L, M, N के तुल्य हैं, जहाँ

$$X = \sum X_1, Y = \sum Y_1, Z = \sum Z_1$$

तथा $L = \sum(y_1Z_1 - z_1Y_1), M = \sum(z_1X_1 - x_1Z_1),$

$N = \sum(x_1Y_1 - y_1X_1)$. जहाँ (x_1, y_1, z_1) उस बिन्दु के नियामक हैं जिस पर एक बल लग रहा है।

अब यदि $O'(f, g, h)$ केन्द्रीय अक्ष पर कोई बिन्दु हो, तो X, Y, Z के मान अपरिवर्तित रहेंगे। L, M, N का मान प्राप्त करने के लिए x_1, y_1, z_1 को क्रमश: $x_1 - f, y_1 - g$ तथा $z_1 - h$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं।

यदि L, M, N के मान क्रमश: L', M', N' हों, तो

$$L' = \sum\{(y_1 - g)Z_1 + (z_1 - h)Y_1\} = \sum(y_1Z_1 - z_1Y_1) - g\sum Z_1 + h\sum Y_1$$

अर्थात् $$L' = L - gZ + hY, \quad (\because Z = \sum Z_1 \text{ तथा } Y = \sum Y_1)$$

इसी प्रकार $\quad M' = M - hX + fZ$

तथा $\quad N' = N - fY + gX.$

अब हम जानते हैं कि परिणामी बल की क्रिया रेखा तथा बलयुग्म की क्रिया रेखा केन्द्रीय अक्ष के लिए सम्पाती होती है, जिससे इनके दिक्-अनुपात समानुपाती होंगे। अर्थात्

$$\frac{L'}{X} = \frac{M'}{Y} = \frac{N'}{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{L - gZ + hY}{X} = \frac{M - hX + fZ}{Y} = \frac{N - fY + gX}{Z}$$

$$= \frac{K}{R} = \text{ मरोड़ का अन्तराल}$$

चूँकि $O'(f, g, h)$ केन्द्रीय अक्ष पर कोई स्वेच्छ बिन्दु है, अतएव उपर्युक्त समीकरण से प्राप्त (f, g, h) का बिन्दुपथ केन्द्रीय अक्ष का समीकरण है। अर्थात्

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

$$= \frac{K}{R} = \text{ मरोड़ का अन्तराल।}$$

अभीष्ट केन्द्रीय अक्ष का समीकरण है।

नोट (Note)— L, M, N का सूत्र याद करने के लिए निम्न का उपयोग करें :

$$L = \sum\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix}, M = \sum\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ Z_1 & X_1 \end{vmatrix}, N = \sum\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}$$

तथा केन्द्रीय अक्ष के समीकरण के लिए,

$$\frac{L - \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}}{X} = \frac{M - \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}}{Y} = \frac{N - \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}}{Z}$$

§ 5·10. दो दिये हुए मरोड़ों का परिणामी मरोड़ प्राप्त करना (To Find the Resultant Wrench of Two given Wrenches)

माना (R_1, K_1) तथा (R_2, K_2) दो दिये हुए मरोड़ हैं, जिनके अक्ष क्रमश: AC तथा BD हैं जो एक-दूसरे से α कोण पर झुके हैं तथा जिनके बीच की न्यूनतम दूरी $AB(= c)$ है।

अब माना की परिणामी मरोड़ का अक्ष OZ के अनुदिश है जो AB को $OB(= c - x)$ तथा $OA(= x)$ भागों में बाँटता है।

निदर्शी उदाहरण (Illustrative Examples)

उदाहरण 1. दो बल, एक रेखा $y = 0, z = 0$ के अनुदिश तथा दूसरी रेखा $x = 0, z = c$ के अनुदिश लगता है। चूँकि बल बदल रहे हैं, दर्शाइये कि इनके समतुल्य मरोड़ के अक्ष द्वारा जनित पृष्ठ $(x^2 + y^2)z = cy^2$ है।

(बिलासपुर 2009; सरगुजा 12)

डाइनेम ज्ञात कीजिए। (रायपुर 2011; बस्तर 12)

हल: माना कि बल P रेखा $y = 0, z = 0$ के अनुदिश अर्थात्

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

के अनुदिश लगता है। अतएव प्रथम बल के अक्षों के अनुदिश घटक हैं $P.1, P.0, P.0$ अर्थात् $P, 0, 0$. इसी प्रकार द्वितीय बल Q (माना) रेखा

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-c}{0}$$

के अनुदिश लगता है और इसलिए द्वितीय बल के अक्षों के अनुदिश घटक हैं: $0, Q, 0$

$$\therefore \quad X = \Sigma X_1 = P,\ Y = \Sigma Y_1 = Q \text{ तथा } Z = \Sigma Z_1 = 0 \qquad ...(1)$$

अब P बिन्दु $(0,0,0)$ पर लगता है अर्थात् $x_1=0,\ y_1=0,\ z_1=0$ तथा X_1, Y_1, Z_1 क्रमशः $P,0,0$ है। अतएव

$$L_1 = y_1Z_1 - z_1Y_1 = 0$$
$$M_1 = z_1X_1 - x_1Z_1 = 0$$
तथा $$N_1 = x_1Y_1 - y_1X_1 = 0$$

पुनः बल Q बिन्दु $(0,0,c)$ पर लगता है अर्थात् $x_2=0,\ y_2=0,\ z_2=c$. तथा X_2, Y_2, Z_2 क्रमशः $0,Q,0$ है। अतएव

$$L_2 = y_2Z_2 - z_2Y_2 = -cQ$$
$$M_2 = z_2X_2 - x_2Z_2 = 0$$
$$N_2 = x_2Y_2 - y_2X_2 = 0$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} L = \Sigma L_1 = -cQ \\ M = \Sigma M_1 = 0 \\ N = \Sigma N_1 = 0 \end{array}\right\} \qquad ...(2)$$

अतः डाइनेम $(X,Y,Z,L,M,N) = (P,Q,0,-cQ,0,0)$ है।

अब केन्द्रीय अक्ष का समीकरण है:

$$\frac{L-(yZ-zY)}{X} = \frac{M-(zX-xZ)}{Y} = \frac{N-(xY-yX)}{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-cQ+zQ}{P} = \frac{-zP}{Q} = \frac{-xQ+yP}{0} \qquad ...(3)$$

समी. (3) के अंतिम दो पदों से,

$$-xQ+yP=0$$

$$\therefore \quad \frac{P}{Q} = \frac{x}{y} \qquad ...(4)$$

पुनः समी. (3) के प्रथम दो पदों से,

$$(z-c)\frac{Q}{P} = -\frac{zP}{Q} \qquad ...(5)$$

समी. (4) तथा (5) मिलकर केन्द्रीय अक्ष का समीकरण देते हैं।

केन्द्रीय अक्ष से जनित पृष्ठ प्राप्त करने के लिए समी. (4) तथा (5) से P और Q को हटाया होगा और इस प्रकार अभीष्ट पृष्ठ है :

$$(z-c).\frac{y}{x} = -z.\frac{x}{y}$$
$$\Rightarrow \quad y^2(z-c) = -x^2z$$
$$\Rightarrow \quad z(x^2-y^2) = cy^2.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 2. तीन बल प्रत्येक P के बराबर, एक पिण्ड पर लगते हैं, एक बिन्दु $(a,0,0)$ पर OY के समान्तर, दूसरा बिन्दु $(0,b,0)$ पर OZ के समांतर तथा तीसरा बिन्दु $(0,0,c)$ पर OX के समान्तर, अक्ष कार्तीय (rectangular) है, परिमाण तथा स्थिति में मरोड़ का परिणामी ज्ञात कीजिए।

(रायपुर 2013)

हल : स्पष्टतः $X=\Sigma X_1 = P,\ Y=\Sigma Y_1 = P$ तथा $Z=\Sigma Z_1 = P$ इसी प्रकार $L=Pb,\ \ N=Pa.$

अतः मरोड़ का यदि R बल तथा K बलयुग्म हो, तो

$$R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = P\sqrt{3}$$

तथा $$KR = LX+MY+NZ = P^2(a+b+c)$$

$$\therefore \quad K = \frac{P^2}{R}(a+b+c) = \frac{P}{\sqrt{3}}(a+b+c)$$

पुनः केन्द्रीय अक्ष का समीकरण है :

$$\frac{L-(yZ-zY)}{X} = \frac{M-(zX-xZ)}{Y} = \frac{N-(xY-yX)}{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Pb-P(y-z)}{P} = \frac{Pc-P(z-x)}{P} = \frac{Pa-P(x-y)}{P}$$

$$\Rightarrow \quad b-y+z = c-z+x = a-x+y$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{a+2b+3c}{3} = y+\frac{b+2c+3a}{3} = z+\frac{c+2a+3b}{3}$$

जिससे स्पष्ट है कि केन्द्रीय अक्ष एक सरल रेखा है जो बिन्दु

$$\left(-\frac{a+2b+3c}{3}, -\frac{b+2c+3a}{3}, -\frac{c+2a+3b}{3}\right)$$

से गुजरती है तथा तीनों अक्षों से समान कोण पर झुकी है। उत्तर

उदाहरण 3. दो समान बलों में से प्रत्येक एक सरल रेखा $\dfrac{x+a\cos\theta}{a\sin\theta} = \dfrac{y-b\sin\theta}{\pm b\cos\theta} = \dfrac{z}{c}$ के अनुदिश लगते हैं। दर्शाइये कि इनके केन्द्रीय अक्ष θ के प्रत्येक मान के लिए पृष्ठ $y\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right) = b\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)$ पर स्थिर होंगे।

(रायपुर 2006, 08)

हल : माना कि समान बल P हैं जो सरल रेखाओं

$$\frac{x+a\cos\theta}{(a\sin\theta)/\lambda} = \frac{y-b\sin\theta}{(b\cos\theta)/\lambda} = \frac{z}{c/\lambda}$$

तथा $$\frac{x+a\cos\theta}{(a\sin\theta)/\lambda} = \frac{y-b\sin\theta}{(-b\cos\theta)/\lambda} = \frac{z}{c/\lambda}$$ के अनुदिश लगते हैं, जहाँ

$$\lambda = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2} \qquad ...(1)$$

स्पष्टतः $x_1 = -a\cos\theta,\ y_1 = b\sin\theta,\ z_1 = 0;$

$$X_1 = P.\frac{(a\sin\theta)}{\lambda},\ Y_1 = P.\frac{(b\cos\theta)}{\lambda},\ Z_1 = P.\frac{c}{\lambda};$$

$$x_2 = -a\cos\theta,\ y_2 = b\sin\theta,\ z_2 = 0;$$

$$X_2 = P.\frac{(a\sin\theta)}{\lambda},\ Y_2 = P.\frac{(-b\cos\theta)}{\lambda},\ Z_2 = P.\frac{c}{\lambda}.$$

$$\therefore \quad X = \Sigma X_1 = \frac{2Pa\sin\theta}{\lambda},\ Y = \Sigma Y_1 = 0,$$

$$Z = \Sigma Z_1 = \frac{2Pc}{\lambda} \qquad ...(2)$$

पुनः $$L_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = \frac{Pbc\sin\theta}{\lambda},$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ Z_1 & X_1 \end{vmatrix} = \frac{Pac\cos\theta}{\lambda},$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix} = -\frac{Pab}{\lambda}.$$

इसी प्रकार, $L_2 = \dfrac{Pbc\sin\theta}{\lambda},\ M_2 = -\dfrac{Pac\cos\theta}{\lambda},$

$$N_2 = -\frac{Pab}{\lambda}.$$

$$\therefore \quad L = \Sigma L_1 = \frac{2bc\sin\theta}{\lambda}P,\ M=0, N = -\frac{2ab}{\lambda}P \qquad ...(3)$$

अतः केन्द्रीय अक्ष का समीकरण है:

$$\frac{L-\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}}{X} = \frac{M-\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}}{Y} = \frac{N-\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}}{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2bc\sin\theta - 2yc}{2a\sin\theta} = \frac{-2az\sin\theta + 2cx}{0}$$

$$= \frac{-2ab+2ay\sin\theta}{2c} \qquad ...(4)$$

अब समी. (4) के मध्य पद से,

$$-2az\sin\theta + 2cx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{cx}{az} \qquad ...(5)$$

पुनः समी. (4) के प्रथम एवं अंतिम पदों से,

$$\frac{bc}{a} - \frac{yc}{a\sin\theta} = -\frac{ab}{c} + \frac{ay\sin\theta}{c}$$

$$\Rightarrow \quad b\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) = y\left(\frac{c}{a\sin\theta} + \frac{a\sin\theta}{c}\right)$$

$$= y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right). \qquad \text{[समी. (5) से]}$$

यही अभीष्ट पृष्ठ है। प्रमाणित।

उदाहरण 4. दो बल P तथा Q उन सरल रेखाओं के अनुदिश लगते हैं जिनके समीकरण क्रमशः $y = x\tan\alpha,\ z = c$ तथा $y = -x\tan\alpha,\ z = -c$ हैं। दर्शाइये कि इनके केन्द्रीय अक्ष सरल रेखा

$$y = x\frac{P-Q}{P+Q}\tan\alpha, \frac{z}{c} = \frac{P^2-Q^2}{P^2+2PQ\cos 2\alpha + Q^2}$$

पर स्थित हैं। P तथा Q के प्रत्येक मान के लिए यह भी सिद्ध कीजिए कि यह रेखा पृष्ठ $(x^2+y^2)z\sin 2\alpha = 2cxy$ का जनक है।

(बिलासपुर 2007, 11; सरगुजा 10; बस्तर 11; रायपुर 12)

हल : यहाँ बल P तथा Q क्रमशः निम्न सरल रेखाओं के अनुदिश लगते हैं :

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{z-c}{0}$$

तथा $$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{-\sin\alpha} = \frac{z+c}{0}$$

$\therefore \quad X_1 = P\cos\alpha,\ Y_1 = P\sin\alpha,\ Z_1 = 0$

तथा $\quad X_2 = Q\cos\alpha,\ Y_2 = -Q\sin\alpha,\ Z_2 = 0.$

$$L_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ P\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = -cP\sin\alpha,$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ Z_1 & X_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & P\cos\alpha \end{vmatrix} = cP\cos\alpha,$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$L_2 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -c \\ -Q\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = -cQ\sin\alpha,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c & 0 \\ 0 & Q\cos\alpha \end{vmatrix} = -cQ\cos\alpha,$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad X = \Sigma X_1 = (P+Q)\cos\alpha,$

$Y = \Sigma Y_2 = (P-Q)\cos\alpha,\ Z = \Sigma Z_1 = 0 \quad ...(1)$

$L = \Sigma L_1 = -c(P+Q)\sin\alpha,$

$M = \Sigma M_1 = c(P-Q)\cos\alpha,\ N = \Sigma N_1 = 0 \quad ...(2)$

अतः केन्द्रीय अक्ष का समीकरण है :

$$\frac{L - \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}}{X} = \frac{M - \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}}{Y} = \frac{N - \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}}{Z}$$

अर्थात् $$\frac{-c(P+Q)\sin\alpha + z(P-Q)\sin\alpha}{(P+Q)\cos\alpha}$$

$$= \frac{c(P-Q)\cos\alpha - z(P+Q)\cos\alpha}{(P-Q)\sin\alpha}$$

$$= \frac{y(P+Q)\cos\alpha - x(P-Q)\sin\alpha}{0},$$

[समी. (1) तथा (2) से]

इसके अन्तिम पद से,

$$y = x\frac{P-Q}{P+Q}\tan\alpha \quad ...(3)$$

पुनः प्रथम दो पदों से,

$$z\frac{P-Q}{P+Q}.\tan\alpha - c\tan\alpha = c\cot\alpha - z\frac{P+Q}{P-Q}\cot\alpha$$

$$\Rightarrow z\left[\frac{P-Q}{P+Q}.\tan\alpha + \frac{P+Q}{P-Q}\cot\alpha\right]$$

$$= c(\tan\alpha + \cot\alpha) \quad ...(4)$$

$$\Rightarrow z[(P-Q)^2\sin^2\alpha + (P+Q)^2\cos^2\alpha]$$

$$= c(P^2 - Q^2)$$

$$\Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 2\alpha} \quad ...(5)$$

समी. (3) तथा (5) केन्द्रीय अक्ष का समीकरण देते हैं।

केन्द्रीय अक्ष से जनित पृष्ठ ज्ञात करने के लिए हमें P तथा Q विलोपित करना पड़ेगा।

समी. (3) से,

$$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{x}{y}\tan\alpha$$

अतः समी. (4) में इसका उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$z\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{2c}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow z(x^2 + y^2)\sin 2\alpha = 2cxy.$$ प्रमाणित।

उदाहरण 5. बल X, Y, Z तीन रेखाओं के अनुदिश लगते हैं जिनके समीकरण हैं: $y = 0, z = c; z = 0, x = a$ तथा $x = 0, y = b$. सिद्ध कीजिए कि समतुल्य मरोड़ का अंतराल (pitch) है :

$$\frac{aYZ + bZX + cXY}{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad \text{(बिलासपुर 2010)}$$

यदि मरोड़ एक एकल बल में परिणत हो जाय, तो दर्शाइये कि बल की क्रिया रेखा अतिपरवलयज (hyperboloid) $(x-a)(y-b)(z-c) - xyz = 0$. पर स्थित होगी।

हल : यहाँ बल X, Y, Z निम्न तीन रेखाओं के अनुदिश लग रहे हैं:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-c}{0};\ \frac{x-a}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} \text{ तथा } \frac{x}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z}{1}.$$

$$\therefore \quad X = \Sigma X_1 = X,\ Y = \Sigma Y_1 = Y,\ Z = \Sigma Z_1 = Z \quad ...(1)$$

$$L_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ Z_1 & X_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & X \end{vmatrix} = cX,$$

उदाहरण 10. एक बल P, X-अक्ष के अनुदिश क्रिया करता है तथा दूसरा बल nP बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ के एक जनक के अनुदिश क्रिया करता है। दर्शाइये कि केन्द्रीय अक्ष बेलन

$$n^2(nx - z)^2 + (1 + n^2)^2 y^2 = n^4 a^2$$

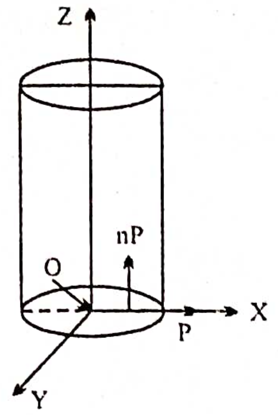
पर स्थित होगा। (रायपुर 2004, 10; बस्तर 11)

हल : माना कि $(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ बेलन पर कोई बिन्दु है तथा एक बल nP, Z-अक्ष के समान्तर दिशा में लगता है।

दूसरा बल P बिन्दु $(0, 0, 0)$ पर X-अक्ष के अनुदिश लगता है अर्थात् बल nP रेखा

$$\frac{x - a\cos\theta}{0} = \frac{y - a\sin\theta}{0} = \frac{z - 0}{1}$$

के अनुदिश लगता है तथा दूसरा बल P रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ के अनुदिश लगता है।



चित्र

तब $X_1 = 0.nP = 0, Y_1 = 0, Z_1 = nP$

$x_1 = a\cos\theta, y_1 = a\sin\theta, z_1 = 0$

$X_2 = 1.P = P, Y_2 = 0.P = 0, Z_2 = 0.P = 0$

$x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 0$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} X = \sum X_1 = P, \\ Y = \sum Y_1 = 0, Z = \sum Z_1 = nP \end{array}\right\} \quad ...(1)$$

$$L_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = anP\sin\theta,$$

$$M_1 = -anP\cos\theta, N_1 = 0$$

$$L_2 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0, M_2 = 0, N_2 = 0$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} L = \sum L_1 = anP\sin\theta, M = \sum M_1 \\ = -anP\cos\theta, N = \sum N_1 = 0 \end{array}\right\} ...(2)$$

अब केन्द्रीय अक्ष का समीकरण है:

$$\frac{L - \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}}{X} = \frac{M - \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}}{Y} = \frac{N - \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}}{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{anP\sin\theta - ynP}{P}$$

$$= \frac{-anP\cos\theta - zP + xnP}{0} = \frac{yP}{nP},$$

[समी. (1) तथा (2) से]

$$\Rightarrow \frac{an\sin\theta - yn}{1} = \frac{-na\cos\theta - z + xn}{0} = \frac{y}{n} \quad ...(3)$$

समी. (3) के मध्य पद से,

$$nx = z + na\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{nx - z}{na} \quad ...(4)$$

समी. (3) के प्रथम एवं अन्तिम पदों से,

$$an^2\sin\theta - yn^2 = y$$

$$\Rightarrow \quad a^2n^4\sin^2\theta = y^2(1+n^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2n^4 - a^2n^4\cos^2\theta = y^2(1+n^2)^2$$

$$\Rightarrow a^2n^4 - a^2n^4 . \frac{(nx-z)^2}{a^2n^2} = y^2(1+n^2)^2,$$

[समी. (4) से]

$$\Rightarrow n^2(nx-z)^2 + (1+n^2)y^2 = n^4a^2. \quad \textbf{प्रमाणित।}$$

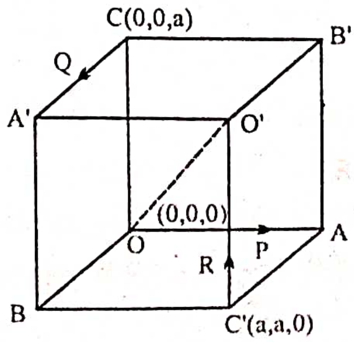
उदाहरण 11. बल *P, Q, R* एक घन के तीन अप्रतिच्छेदी कोरों के अनुदिश लगते हैं; केन्द्रीय अक्ष ज्ञात कीजिए।

(सरगुजा 2011; बिलासपुर 09)

हल : माना तीनों बल क्रमशः a भुजा के घन के कोरों $OA, CA', C'O'$ के अनुदिश लगते हैं, जिनके समीकरण हैं :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0};$$

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-a}{0}$$



चित्र

तथा $\dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y-a}{0} = \dfrac{z}{1}.$

$$\therefore \quad X = P, Y = Q, Z = R.$$

BF पर P के लिए, $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix}$ से,

$$L_3 = aP, M_3 = 0, N_3 = 0$$

FC पर P के लिए, $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix}$ से,

$$L_4 = aP, M_4 = 0, N_4 = 0$$

CH पर P के लिए, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix}$ से,

$$L_5 = 0, M_5 = aP, N_5 = 0$$

तथा HA पर P के लिए, $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix}$ से,

$$L_6 = 0, M_6 = aP, N_6 = 0$$

$\therefore$ $L = \Sigma L_i = 0 + 0 + aP + aP + 0 + 0$

$= 2aP$

$M = \Sigma M_i = 2aP$

तथा $N = \Sigma N_i = 2aP$

अतः $G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$

$= \sqrt{4a^2P^2 + 4a^2P^2 + 4a^2P^2}$

$= \sqrt{12a^2P^2} = 2\sqrt{3}aP$

अतः बल निकाय एक बलयुग्म के तुल्य होगा जिसका आघूर्ण $2\sqrt{3}Pa$ होगा। **प्रमाणित।**

उदाहरण 17. एक दीर्घवृत्तज (ellipsoid) के मुख्य समतलों द्वारा कटे एक अष्टांक के प्रत्येक बिन्दु पर अभिलम्ब (normal) दिशा के अनुदिश एक बल जो P पर पृष्ठ के अवयव के समानुपातिक (Proportional) है, क्रिया करता है। दर्शाइये कि ये बल एक एकल बल के तुल्य है, जो रेखा :

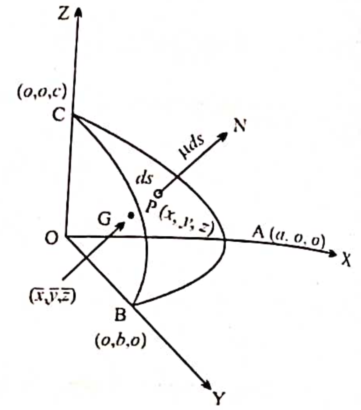
$$a\left(x - \frac{4a}{3\pi}\right) = b\left(y - \frac{4b}{3\pi}\right) = c\left(z - \frac{4c}{3\pi}\right)$$

के अनुदिश क्रियाशील है, जहाँ $2a, 2b, 2c$ दीर्घवृत्तज के अक्ष हैं। (रायपुर 1990, 2009)

हल : दिये गए दीर्घवृत्तज का समीकरण है :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots(1)$$

इस दीर्घवृत्त के धन अष्टांक $OCABO$ सतह पर स्वेच्छ बिन्दु $P(x, y, z)$ लेते हैं। मानलो कि P पर अभिलम्ब PN की दिक् कोज्याएँ l, m, n हैं। तब PN के अनुदिश



चित्र : दीर्घवृत्तज की धन अष्टांक की सतह। ऊपरी सतह ABCA पर ds है।

क्षेत्र ds पर बल μds कार्यरत है। माना कि बल निकाय के डाइनेम (X, Y, Z, L, M, N) है तब अक्षों के सापेक्ष बलों के वियोजन क्रमशः इस प्रकार होगा—

$$X = \sum X_1 = \sum l.\mu ds = \mu.\sum l ds$$

$= \mu$ (समतल- yz पर अष्टांक का प्रक्षेप)

$$= \mu.\frac{\pi abc}{4},$$

[$\therefore$ दीर्घवृत्तज (1) का yz– समतल पर प्रक्षेप एक दीर्घवृत्त (ellipse) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ है जिसका क्षेत्रफल $\frac{\pi bc}{4}$ है।]

इसी प्रकार, $Y = \frac{\mu\pi ca}{4}, Z = \frac{\mu\pi ab}{4}$

तथा अक्षों के अनुदिश बलयुग्म का आघूर्ण

$L = \sum(yZ - zY)$

$= \sum[y\mu nds - z\mu mds]$, [$\because Z = \mu nds, Y = \mu mds$]

$= \mu[\bar{y}\sum nds - \bar{z}\sum mds]$

किन्तु दीर्घवृत्तज (1) धन अष्टांक के लिए गुरुत्व-केन्द्र G के निर्देशांक दिये जाते हैं,

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}, \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}, \bar{z} = \frac{4c}{3\pi}.$$

$\therefore$ $L = \mu\left[\frac{4b}{3\pi}.\sum nds - \frac{4c}{3\pi}.\sum mds\right]$

$= \mu\left[\frac{4b}{3\pi}.\frac{\pi ab}{4} - \frac{4c}{3\pi}.\frac{\pi ca}{4}\right]$

$= \frac{\mu a}{3}(b^2 - c^2)$

इसी प्रकार, $M = \frac{\mu b}{3}(c^2 - a^2), N = \frac{\mu c}{3}(a^2 - b^2)$

अब, $LX + MY + NZ = \frac{\mu^3 a}{3}(b^2 - c^2).\frac{\mu\pi bc}{4} + \frac{\mu b}{3}$

$(c^2 - a^2).\frac{\mu\pi ca}{4} + \frac{\mu c}{3}(a^2 - b^2).\frac{\mu\pi ab}{4}$

$= \frac{\mu^2\pi ab}{12}[b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2] = 0$

$\therefore$ $LX + MY + NZ = 0$

अतः निकाय एक एकल बल के तुल्य है।

अब केन्द्रीय अक्ष के समीकरण हैं—

$$\frac{L - (yZ - zY)}{X} = \frac{M - (zX - xZ)}{Y} = \frac{N - (xY - yX)}{Z}$$

$$= P = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0$$

$\therefore$

$$L - yZ + zY = 0 \quad \ldots(2)$$

$$M - zX + xZ = 0 \quad \ldots(3)$$

$$N - xY + yX = 0 \quad \ldots(4)$$

समी. (2) से,

$$\frac{\mu a}{3}(b^2 - c^2) - y\frac{\mu\pi ab}{4} + z\frac{\mu\pi ca}{4} = 0$$

$\Rightarrow$ $4a(b^2 - c^2) - 3y\pi ab + 3z\pi ca = 0$

$\Rightarrow$ $ab(4b - 3y\pi) - ac(4c - 3z\pi) = 0$

$\Rightarrow$ $b\left(y - \frac{4b}{3\pi}\right) = c\left(z - \frac{4c}{3\pi}\right).$

इसी प्रकार समी. (3) तथा (4) से,

$$c\left(z - \frac{4c}{3\pi}\right) = a\left(x - \frac{4a}{3\pi}\right)$$

$$a\left(x - \frac{4a}{3\pi}\right) = b\left(y - \frac{4b}{3\pi}\right)$$

इन्हें संयोजित करने पर,

$$a\left(x - \frac{4a}{3\pi}\right) = b\left(y - \frac{4b}{3\pi}\right) = c\left(z - \frac{4c}{3\pi}\right)$$

यही अभीष्ट क्रिया रेखा का समीकरण है। **प्रमाणित।**

प्रश्नावली 5·1

1. तीन बल, प्रत्येक परिमाण P का तथा अक्षों के धनात्मक दिशा में लगने वाले की क्रिया रेखाएँ है :
$-y = z = a, -z = x = a, -x = y = a;$
सिद्ध कीजिए कि वे मूलबिन्दु पर एक बल $P\sqrt{3}$ तथा एक बलयुग्म के तुल्य हैं।

2. दर्शाइये कि एक दिये हुए बल, मूलबिन्दु पर बलों (X, Y, Z) तथा एक बलयुग्म (L, M, N) के बराबर की क्रिया रेखा है:
$$\frac{yZ - zY}{L} = \frac{zX - xZ}{M} = \frac{xY - yX}{N} = 1.$$

3. बराबर बल a भुजा वाले एक घन के विपरीत फलकों के दो लम्बवत् विकर्णों के अनुदिश लगते हैं। दर्शाइये कि वे घन के केन्द्र से गुजरने वाली रेखा के अनुदिश लगने वाले एक एकल बल R तथा अक्ष के लिए समान रेखा के साथ बल-युग्म $\frac{1}{2}aR$ के तुल्य है।

4. छः बल एक चतुष्फलक (tetrahedron) के किनारों AB, BC, CA, AD, BD, CD के अनुदिश लगते हैं, प्रत्येक बल उस किनारे की लम्बाई के समानुपाती है, जिसके अनुदिश वह लगता है। दर्शाइये कि इनके केन्द्रीय अक्ष DG के समान्तर हैं तथा इससे $\frac{2}{3}\Delta\cos\phi / DG$ दूरी पर है, जहाँ Δ फलक ABC का क्षेत्रफल है, G इसका गुरुत्व केन्द्र तथा ϕ वह कोण है जो DG फलक के साथ बनाता है।

5. एक बल F, Z-अक्ष के अनुदिश लगता है तथा एक बल mF एक सरल रेखा के अनुदिश लगता है, जो X–अक्ष को मूलबिन्दु से c दूरी पर प्रतिच्छेदित करता है तथा YZ–तल के समान्तर है। दर्शाइये कि जैसे ही यह सरल रेखा X–अक्ष की ओर मुड़ती है, वैसे ही केन्द्रीय अक्ष पृष्ठ $[m^2z^2 + (m^2 - 1)y^2](c - x)^2 = x^2z^2$ जनित करता है।

6. एक दिये हुए बलों का निकाय एक बल तथा एक बलयुग्म के तुल्य इस प्रकार है कि बलयुग्म के अक्ष तथा बल की क्रिया-रेखा के बीच का कोण दिया हुआ है। दर्शाइये कि बल की क्रिया-रेखा एक वृत्तीय बेलन पर है।

7. एक अतिपरवलयज के समान निकाय के जनकों के अनुदिश बल लगते हैं तथा तुल्य मरोड़ों का अन्तराल (pitch) ϕ दिया हुआ है। सिद्ध कीजिए कि केन्द्रीय अक्ष अतिपरवलयज

निष्प्रभावी बिन्दु (Null Point)—बिन्दु O' स्वयं निष्प्रभावी बिन्दु कहलाती है। (रायपुर 2004; सरगुजा 11)

प्रमेय 1. निष्प्रभावी रेखा बलयुग्म के अक्ष पर होती है तथा निकाय के बलों का इस रेखा के परितः आघूर्णों का योग शून्य होता है।

प्रमाण (Proof)—माना कि किसी मूलबिन्दु अथवा आधार बिन्दु O' के संगत दिए हुए निकाय के बलों का परिणामी बल R तथा परिणामी बलयुग्म G है। G के अक्ष के लम्बवत् O' से गुजरता हुआ कोई रेखा लें। तब इस रेखा के परितः निकाय के बलों के आघूर्णों का योग शून्य होगा, क्योंकि इसके अनुदिश G के अक्ष का कोई घटक नहीं है तथा R इससे मिलता है। यही रेखा निष्प्रभावी रेखा होती है।

प्रमेय 2. कार्तीय अक्षों Ox, Oy, Oz के संदर्भ में दिये हुए बिन्दु (f, g, h) के निष्प्रभावी तल का समीकरण प्राप्त करना।

प्रमाण (Proof)—माना कि निकाय के बलों के कार्तीय अक्षों के अनुदिश घटक X, Y, Z हैं तथा इन अक्षों के परितः बलयुग्म के घटक L, M, N हैं।

अब (f, g, h) से गुजरने वाली रेखा के परितः बलयुग्मों के घटक आघूर्ण होंगे :

$$L - gZ + hY, M - hX + fZ, N - fY + gX$$

तथा ये (f, g, h) पर परिणामी बलयुग्म के अक्ष की दिक्-कोज्याओं के समानुपाती हैं, जहाँ परिणामी बलयुग्म का अक्ष निष्प्रभावी तल के लम्बवत् हैं।

अतः निष्प्रभावी तल का समीकरण है :

$$(x-f)(L - gZ + hY) + (y-g)(M - hX + fZ) + (z-h)(N - fY + gX) = 0$$

$$\Rightarrow x(L - gZ + hY) + y(M - hX + fZ) + z(N - fY + gX) = fL + gM + hN \quad ...(1)$$

नोट—बिन्दु (f, g, h) के निष्प्रभावी तल (1) को निम्नवत् भी व्यक्त किया जा सकता है :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ f & g & h \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = L(x-f) + M(y-g) + N(z-h).$$

प्रमेय 3. दिये हुए तल $lx + my + nz = 1$ का निष्प्रभावी बिन्दु ज्ञात करना।

(रायपुर 2004, 05, 10, 11; विलासपुर 04, 09,13; सरगुजा 12; बस्तर 12)

प्रमाण (Proof)—माना कि तल

$$lx + my + nz = 1 \quad ...(1)$$

का निष्प्रभावी बिन्दु (f, g, h) है।

परन्तु हम जानते हैं कि दिये हुए बिन्दु (f, g, h) के निष्प्रभावी तल का समीकरण

$$x(L - gZ + hY) + y(M - hX + fZ) + z(N - fY + gX) = fL + gM + hN \quad ...(2)$$

होता है, जहाँ X, Y, Z दिये हुए निकाय के बलों का कार्तीय अक्षों के अनुदिश घटक है तथा L, M, N इन अक्षों के परितः बलयुग्मों के घटक हैं।

तब समी. (1) तथा (2) की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{L - gZ + hY}{l} = \frac{M - hX + fZ}{m} = \frac{N - fY + gX}{n} = fL + gM + hN \quad ...(3)$$

चूँकि बिन्दु (f, g, h) भी तल (1) पर होना चाहिए, अतएव समी. (1) से,

$$lf + mg + nh = 1 \quad ...(4)$$

समी. (3) के प्रथम एवं द्वितीय पदों से, हम पाते हैं कि

$$Lm - mgZ + mhY = Ml - hlX + lfZ$$

$$\Rightarrow \quad h(lX + mY) = (lf + mg)Z - mL + lM$$

$$\Rightarrow h(lX + mY) = (1 - nh)Z - mL + lM, \quad \text{[समी. (4) से]}$$

$$\Rightarrow h(lX + mY + nZ) = Z - mL + lM \quad ...(5)$$

इसी प्रकार प्रथम एवं तृतीय पदों से,

$$g(lX + mY + nZ) = Y - lN + nL \quad ...(6)$$

तथा द्वितीय एवं तृतीय पदों से,

$$f(lX + mY + nZ) = X - nM + mN \quad ...(7)$$

अतः समी. (5),(6) तथा (7) से हम पाते हैं कि

$$\frac{f}{X - nM + mN} = \frac{g}{Y - lN + nL} = \frac{h}{Z - mL + lM} = \frac{1}{lX + mY + nZ}$$

इस प्रकार इससे निष्प्रभावी बिन्दु (f, g, h) के नियामक प्राप्त होते हैं।

प्रमेय 4. वह प्रतिबन्ध ज्ञात करना जिससे कि सरल रेखा

$$\frac{x-f}{l}=\frac{y-g}{m}=\frac{z-h}{n}$$

बलों के समान निकाय के लिए एक निष्प्रभावी रेखा हो।

(रायपुर 2004, 09, 12; बिलासपुर 2005, 08, 10, 11, 13)

प्रमाण (Proof)—माना कि किसी दिये हुए निकाय के बलों के कार्तीय अक्षों के अनुदिश घटक X, Y, Z हैं तथा इन अक्षों के परितः बलयुग्मों के घटक L, M, N हैं।

तब (f, g, h) से गुजरने वाली रेखा के परितः बलयुग्मों के घटक होंगे :

$$L-gZ+hY, M-hX+fZ, N-fY+gX.$$

अतः दी हुई रेखा के परितः बलयुग्म का आघूर्ण

$$=l(L-gZ+hY)+m(M-hX+fZ)$$
$$+n(N-fY+gX)$$

और इसलिए शून्य होगा यदि

$$X(mh-ng)+Y(nf-lh)+Z(lg-mf)$$
$$=Ll+Mm+Nn$$

अर्थात् यदि $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ f & g & h \end{vmatrix}=Ll+Mm+Nn.$

यही अभीष्ट प्रतिबन्ध है।

अत: $(f, g, h) = (0, 0, 0)$ तथा (ρ, ρ, ρ) के लिए ये क्रमश: हैं:

$$Lx + My + Nz = 0 \qquad ...(1)$$

$$\text{तथा} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = L\left(\frac{x}{\rho} - 1\right) + M\left(\frac{y}{\rho} - 1\right) + N\left(\frac{z}{\rho} - 1\right)$$

$$\Rightarrow x(Z - Y) + y(X - Z) + z(Y - X) = -(L + M + N), \quad [\because \rho = \infty]$$

$$\Rightarrow x(Y - Z) + y(Z - X) + z(X - Y) = L + M + N \qquad ...(2)$$

समी. (1) तथा (2) मिलकर संयुग्मी रेखा के समीकरण देते हैं।

उदाहरण 3. $(X, Y, Z; L, M, N)$ द्वारा दिये गये बलों के एक निकाय को दो बलों द्वारा विस्थापित किया जाता है, एक X- अक्ष के अनुदिश लग रहा है तथा अन्य बल द्वारा। दर्शाइये कि बल के परिमाण हैं :

$$\frac{LX + MY + NZ}{L}$$

$$\text{तथा} \quad \frac{[(MY + NZ)^2 + L^2(Y^2 + Z^2)]^{1/2}}{L}$$

अन्य बल की क्रिया-रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

(रायपुर 2012; सरगुजा 11)

हल : माना कि बल P मूलबिन्दु $(0, 0, 0)$ पर X-अक्ष के अनुदिश लगता है। तब अक्षों के समान्तर इसके घटक $P, 0, 0$ होंगे।

पुन: $(0, 0, 0)$ पर बलयुग्मों के सभी घटक शून्य होंगे।

चूँकि निकाय $(X, Y, Z; L, M, N)$ है अतएव अन्य बलों का अक्षों के समान्तर घटक $X-P, Y, Z$ होगा।

यदि अन्य बल बिन्दु $(f, g, 0)$ पर लगता है। तब,

$$L = gZ, M = -fZ, N = fY - g(X - P)$$

$$\therefore \quad N = -\frac{M}{Z}Y - \frac{L}{Z}(X - P)$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{LX + MY + NZ}{L}$$

$$\therefore \quad X - P = X - \frac{LX + MY + NZ}{L} = -\frac{MY + NZ}{L}$$

$$\therefore \text{ परिणामी} = \sqrt{(X - P)^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\frac{MY + NZ}{L}\right)^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(MY + NZ)^2 + L^2(Y^2 + Z^2)}$$

इसकी क्रिया-रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए हम बिन्दुओं $(0, 0, 0)$ तथा $(\rho, 0, 0)$ के निष्प्रभावी तलों का समीकरण लिखेंगे, जहाँ ρ दिये हुए रेखा का अनन्त है।

$(0, 0, 0)$ के निष्प्रभावी तल का समीकरण है :

$$LX + MY + NZ = 0 \qquad ...(1)$$

तथा $(\rho, 0, 0)$ के निष्प्रभावी तल का समीकरण है :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \rho & 0 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = L(x - \rho) + M(y - 0) + N(z - 0)$$

$$\Rightarrow \quad \rho(zY - yZ) = L(x - \rho) + My + Nz$$

$$\Rightarrow \quad zY - yZ = -L,$$

[ρ से भाग देने तथा $\rho = \infty$ रखने पर]

$$\Rightarrow \quad yZ - zY = L \qquad ...(2)$$

अत: समी. (1) तथा (2) मिलकर अन्य बल की क्रिया-रेखा का समीकरण देते हैं। प्रमाणित।

उदाहरण 4. बल निकाय $(X, Y, Z; L, M, N)$ के लिए तल $x + y + z = 0$ का निष्प्रभावी बिन्दु (null point) ज्ञात कीजिए।

(सरगुजा 2010, 12; बस्तर 12; रायपुर 04, 06, 10,13; बिलासपुर 05, 08, 09, 11)

हल : माना कि (f, g, h) दिये हुए तल का निष्प्रभावी बिन्दु है। तब इसके निष्प्रभावी तल का समीकरण है :

$$x(L - gZ + hY) + y(M - hX + fZ) + z(N - fY + gX) = fL + gM + hN$$

इसकी तुलना दिये हुए तल $x + y + z = 0$ से करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{L - gZ + hY}{1} = \frac{M - hX + fZ}{1} = \frac{N - fY + gX}{1} = \frac{fL + gM + hN}{0} \qquad ...(1)$$

पुन: चूँकि (f, g, h) दिये हुए तल पर है, अतएव

$$f + g + h = 0 \qquad ...(2)$$

अब समी. (1) के प्रथम दो पदों से,

$$(f + g)Z - h(X + Y) = L - M$$

$$\Rightarrow \quad -hZ - h(X + Y) = L - M, \qquad [\text{समी. (2) से}]$$

$$\therefore \quad h = -\frac{L - M}{X + Y + Z}$$

इसी प्रकार समी. (1) के द्वितीय एवं तृतीय पदों से,

$$f = -\frac{M - N}{X + Y + Z}$$

तथा समी. (1) के प्रथम एवं तृतीय पदों से,

$$g = -\frac{N - L}{X + Y + Z}$$

इस प्रकार निष्प्रभावी बिन्दु है :

$$\left(-\frac{M - N}{X + Y + Z}, -\frac{N - L}{X + Y + Z}, -\frac{L - M}{X + Y + Z}\right). \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 5. एक सरल रेखा निम्न समीकरणों द्वारा दिया गया है :

$$Ax + By + Cz = D, A'x + B'y + C'z = D'.$$

दर्शाइये कि इसका संयुग्मी निम्न सारणिक के किसी दो को शून्य करने से प्राप्त होगा

$$\begin{vmatrix} L' & M' & N' & Lx + My + Nz \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 0,$$

जहाँ L', M', N' बिन्दु (x, y, z) पर बलयुग्मों के घटक हैं तथा मूलबिन्दु के अनुदिश ये L, M, N हैं।

हल : माना कि (x', y', z') वर्तमान नियामक हैं। यदि (x, y, z) कोई स्वेच्छ बिन्दु हो, तो निष्प्रभावी रेखा के दिक्-अनुपात $x' - x, y' - y, z' - z$ होंगे।

पुन: L', M', N' बिन्दु (x, y, z) पर बलयुग्म का आघूर्ण है ये बलयुग्म के अक्ष के दिक् अनुपात होंगे जो परिभाषा से निष्प्रभावी रेखा के लम्बवत् है।